



Kinetic Analysis in Three-Dimensional Movements Using Two-Dimensional Inverse Dynamics Methods

Majed Dehghani

Department of Medical Sciences and Technologies, ST.C.,
Islamic Azad University, Tehran, Iran.

Shahab Zorriasatein

Department of Physics, ST.C., Islamic Azad University,
Tehran, Iran.

**Farhad Tabatabai
Ghomsheh***

Department of Ergonomics, University of Social Welfare and
Rehabilitation Sciences, Tehran, Iran

Morteza Darjani

Department of Biomedical Engineering, SR.C., Islamic Azad
University, Tehran, Iran.

Abstract

In this paper, the obstacles to solve three-dimensional motion problems using two-dimensional Newton-Euler analyses are presented and examined. The three-dimensional motion analysis method used in industry and medicine is based on a robotic approach and is based on the mathematics of matrix analysis. This approach requires a deep understanding of matrix mathematics and controlling the accuracy of its performance at each stage, which has its own complexities. The aim of this paper is to apply two-dimensional methods for analyzing problems that are inherently three-dimensional and require spatial geometric vector analyses. The main method proposed in this paper to solve the major problem of three-dimensional analyses is to use a two-dimensional image of the member length instead of using the full length of the member in calculations, especially when calculating the moment of inertia of three-dimensional objects on a plane. This research is a type of mathematical analysis and proves the similarity of the results between two-dimensional and three-dimensional approaches in the analysis of three-dimensional problems. The analysis tool in this study is the inverse dynamics method. The assumption of dynamic determinism governs the analysis, that is, for each unknown variable, an equation between the variables in the problem is necessary. This is important in most problems assuming that the spatiotemporal data of the movement of each member and at least one end or joint in the mechanism are known. The results obtained in this paper show that it is possible to calculate the moment of inertia of three-dimensional objects moving in space using two-dimensional kinematic analyses. The advantages and disadvantages of both three-dimensional and two-dimensional methods are mentioned in this research. The use of two-dimensional methods in the analysis of three-dimensional objects moving in space provides a better understanding of the movement and monitoring the results. Also, with this approach, researchers can monitor the accuracy of the results and the spatiotemporal trend of kinematic variables and prevent and avoid computational errors and mathematical modeling in describing three-dimensional movements.

Keywords: joint range of motion, linear and angular velocities and accelerations, three-dimensional moment of inertia, inverse dynamic analysis

Received: 09/April/2025

Accepted: 29/May/2025

eISSN: -----

ISSN: -----

تحلیل سینتیک در حرکات سه‌بعدی با استفاده از روش‌های دینامیک معکوس دوبعدی

ماجد دهقانی

گروه علوم و فناوری های پزشکی، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران،
ایران

شهاب ذوالریاستین

گروه فیزیک، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

فرهاد طباطبائی قمشه*

گروه ارگونومی، دانشگاه علوم توانبخشی و سلامت اجتماعی، تهران، ایران

مرتضی درجانی

گروه مهندسی پزشکی، واحد رامسر، دانشگاه آزاد اسلامی، رامسر، ایران

چکیده

در این مقاله، موانع حل مسائل سه‌بعدی حرکت با استفاده از تحلیل‌های دوبعدی نیوتن اوایلر، ارائه و بررسی می‌شود. روش تحلیل سه‌بعدی حرکت که در صنعت و پزشکی مورد استفاده قرار می‌گیرد، بر مبنای نگرش رباتیک و بر اساس ریاضیات تحلیل ماتریس‌ها استوار است. این رویکرد، نیازمند درک عمیق ریاضیات ماتریس بوده و کنترل صحت عملکرد آن در هر مرحله، پیچیدگی‌های خود را دارد. هدف تحقیق، تصحیح روش‌های دوبعدی برای تحلیل مسائلی است که ذاتاً سه‌بعدی بوده و نیازمند تحلیل‌های برداری هندسی فضایی هستند. روش اصلی پیشنهادی در این مقاله برای رفع مشکل عمده‌ی تحلیل‌های سه‌بعدی، استفاده از تصویر دوبعدی طول عضو به جای استفاده از طول کامل عضو در محاسبات به‌ویژه در هنگام محاسبه‌ی ممان اینرسی اجسام سه‌بعدی در صفحه است. این تحقیق، از نوع تحلیل ریاضی و اثبات همسانی نتایج بین دو نگرش دو و سه‌بعدی در تحلیل مسائل سه‌بعدی است. ابزار تحلیل در این مطالعه، روش دینامیک معکوس است. فرض معین بودن دینامیکی، حاکم بر تحلیل است؛ یعنی به ازای هر متغیر مجهول، یک معادله‌ی فی‌مابین متغیرهای موجود در مسئله ضرورت دارد. این مهم در اغلب مسائل، با فرض معلوم بودن داده‌های فضایی زمانی حرکت هر عضو و معلوم بودن حداقل یک انتها یا مفصل در مکانیزم است. نتایج به‌دست آمده، نشان می‌دهد که امکان محاسبه‌ی ممان اینرسی اجسام سه‌بعدی متحرک در فضا با استفاده از تحلیل‌های دوبعدی سینماتیک فراهم است. مزایا و معایب دو روش سه‌بعدی و دوبعدی، در این تحقیق اشاره شده است. استفاده از روش‌های دوبعدی در تحلیل اجسام سه‌بعدی که در فضا حرکت می‌کنند، امکان درک بهتر حرکت و نظارت بر نتایج را فراهم می‌آورد. همچنین محققان با این رویکرد می‌توانند بر صحت نتایج و روند فضایی زمانی متغیرهای سینماتیک نظارت نمایند و از بروز خطاهای محاسباتی و مدل‌سازی ریاضی در توصیف حرکات سه‌بعدی، پیشگیری و اجتناب نمایند.

کلیدواژه‌ها: دامنه‌ی حرکتی مفاصل، سرعت‌ها و شتاب‌های خطی و زاویه‌ای، ممان اینرسی سه‌بعدی، تحلیل دینامیک معکوس

مقدمه

تحلیل های سینماتیک حرکات در صنعت و پزشکی، با استفاده از روش های هندسه ی فضایی به کمک ماتریس های سه بعدی امکان پذیر است. این روش ها به دلیل ماهیت پیچیده، امکان ره گیری فرآیند و پیش بینی تغییرات متغیرهای سینماتیکی را ناممکن می نمایند. برخی روش ها مبتنی بر تحلیل بردارها و مقادیر ویژه در برخی حالت های خاص توسعه یافته اند که البته تسلط بر آنها نیز اغلب به دانش و بینش ریاضی قابل توجهی نیاز دارد. اغلب ارائه ی یک روش ساده و دقیق که در عین سادگی، خطاهای ناشی از ساده سازی را نیز به توصیف ریاضی سیستم القا نماید، به طور عمده مقدور نیست. حتی در برخی نگرش های مدل سازی، برای ایجاد یک تصویر کلی از عملکرد سیستم، پذیرفتن خطا و دور شدن از واقعیت ناگزیر می نماید. در این مقاله، با استفاده از فرضیات منطقی در تحلیل سه بعدی سینماتیک حرکت فرضیاتی لحاظ شده است که با استفاده از روش های دوبعدی نیز می توان به همان دقت تحلیل های سه بعدی دست یافت.

پیشینه ی پژوهش

تحلیل سینماتیکی و سینتیکی حرکت انسان، از دیرباز به عنوان یکی از روش های پایه در مطالعات بیومکانیک مورد استفاده قرار گرفته است. در این میان، روش های تحلیل سه بعدی به واسطه ی توانایی بالا در نمایش حرکت در محورهای مختلف فضایی، به ویژه در مطالعات گام برداری، تحلیل مفاصل و طراحی ارتز و پروتز، جایگاه مهمی پیدا کرده اند (۱). این روش ها با استفاده از سیستم های ثبت حرکت نوری، صفحات نیرو و نرم افزارهای پردازش دینامیکی، امکان اندازه گیری دقیق نیروها، گشتاورها و ممان اینرسی در سطوح مختلف حرکتی را فراهم می کنند.

با این حال، تحلیل های سه بعدی، همواره با چالش هایی چون هزینه ی بالا، پیچیدگی تجهیزات، نیاز به فضای خاص آزمایشگاهی و نیاز به آموزش پیشرفته همراه بوده اند (۲)؛ از این رو، تحلیل دوبعدی حرکت، به عنوان روشی ساده تر و در دسترس تر، در سال های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. در پژوهشی که توسط جانسون و همکاران^۱ (۳) انجام شد، نشان داد که در شرایط کنترل شده و حرکات ساده، روش های دوبعدی می توانند با دقت قابل قبولی به تحلیل متغیرهای حرکتی پردازند؛ به ویژه در صفحه ساجیتال که در گام برداری کاربرد بیشتری دارد.

در همین راستا، لی و همکاران^۲ (۴)، با معرفی مدلی ریاضی که در آن از طول تصویر دوبعدی یک عضو به جای طول واقعی آن در فضا استفاده می شود، نشان دادند که امکان برآورد دقیق تر ممان اینرسی در محیط دوبعدی وجود دارد. این روش، به طور خاص در تحلیل حرکت اجسام صلبی که در یک صفحه ی غالب حرکت می کنند (مانند اندام تحتانی در حین راه رفتن)، کاربردپذیری بالایی دارد.

در مطالعات بالینی نیز استفاده از ابزارهای پوشیدنی مانند حسگرهای حرکتی یا کفش های هوشمند، همراه با تحلیل دوبعدی، توانسته است راهکارهایی عملی و کم هزینه برای تحلیل حرکت بیماران فراهم کند؛ به عنوان نمونه، سیائو و همکاران^۳ (۵)، در مطالعه ای روی بیماران سکته ی مغزی، از تحلیل دوبعدی همراه با حسگرهای پوشیدنی برای پایش کیفیت گام برداری بهره بردند.

با وجود این تلاش ها، هنوز شکاف هایی در زمینه ی تخمین پارامترهای دینامیکی سه بعدی با استفاده از داده های دوبعدی وجود دارد. از جمله ی این شکاف ها می توان به عدم امکان تحلیل حرکات چرخشی پیچیده، تخمین دقیق ممان اینرسی و محدودیت های وابسته به زاویه ی دید اشاره کرد.

1. Johnson et al.

2. Lee et al.

3. Seo et al.

در این راستا، پژوهش حاضر با بهره‌گیری از روش دینامیک معکوس و مدل‌سازی ریاضی، مدلی ارائه می‌دهد که با استفاده از طول تصویر عضو در صفحه، امکان تخمین دقیق‌تری از پارامترهای سینتیکی سه‌بعدی را در محیط‌های دوبعدی فراهم می‌سازد. این مدل، می‌تواند به‌عنوان ابزاری برای افزایش دقت تحلیل‌های دوبعدی و کاهش نیاز به ابزارهای گران‌قیمت سه‌بعدی مورد استفاده قرار گیرد.

روش

در تحلیل حرکت سه‌بعدی، به‌ویژه در کاربردهای مهندسی پزشکی و رباتیک صنعتی، از رویکردهای گوناگونی بهره گرفته می‌شود. دو شیوه‌ی رایج در این حوزه، شامل (۱) تحلیل برداری در فضای سه‌بعدی و (۲) تحلیل مبتنی بر جبر ماتریسی است؛ رویکردی که به‌طور خاص در مدل‌سازی سینماتیکی و دینامیکی سامانه‌های رباتیک کاربرد دارد (۶). در این روش، به‌منظور توصیف دقیق وضعیت و حرکت اجزای مکانیکی، از ماتریس‌هایی با ابعاد متغیر استفاده می‌شود که این ابعاد با تعداد درجات آزادی سیستم، رابطه‌ی مستقیم دارند. هر درجه‌ی آزادی -نظیر جابه‌جایی خطی، دوران زاویه‌ای یا تغییر طول بازو- موجب افزایش ابعاد ماتریس‌های جابه‌جایی، سرعت و شتاب می‌گردد (۷). تحلیل این سامانه‌ها، به درک عمیق مفاهیم پیشرفته در جبر خطی و دینامیک چندجسمی نیاز دارد. افزون بر این، راستی‌آزمایی نتایج و کنترل صحت محاسبات در هر مرحله، مستلزم تسلط بر مدل‌سازی فضایی و تکنیک‌های عددی دقیق است (۸، ۹).

در فضای اقلیدسی سه‌بعدی، موقعیت یک نقطه، به‌وسیله سه متغیر مستقل مشخص می‌شود که معمولاً با مختصات کارتزین (X, Y, Z) نمایش داده می‌شوند؛ بنابراین، توصیف کامل وضعیت دو نقطه‌ی مستقل در فضا، مستلزم شش متغیر مستقل است. با این حال، اگر این دو نقطه به‌وسیله‌ی یک عضو صلب (میله‌ای بدون تغییر شکل) به یکدیگر متصل باشند، یک قید هندسی به سیستم اعمال می‌شود؛ به این معنا که فاصله‌ی بین آن دو نقطه، همواره ثابت باقی می‌ماند.

این قید فاصله‌ی ثابت، یکی از درجات آزادی سیستم را حذف می‌کند و تعداد متغیرهای مستقل لازم برای توصیف حرکت کل سیستم، به پنج کاهش می‌یابد. چنین حالتی، نمایانگر یکی از اصول بنیادین در تحلیل حرکت اجسام صلب بوده که در آن تعداد درجات آزادی، همواره برابر است با تعداد متغیرهای آزاد منهای تعداد قیود مستقل هندسی یا سینماتیکی اعمال‌شده بر سیستم.

این مفاهیم، شالوده‌ی مدل‌سازی سینماتیک و دینامیک سیستم‌های چندجسمی و همچنین تحلیل اجسام صلب در حوزه‌های مهندسی مکانیک، رباتیک و بیومکانیک را تشکیل می‌دهند (۸، ۱۰).

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (1)$$

برای تحلیل سینتیک این میله در فضا، لازم است نیروها و گشتاورهای وارد بر آن مشخص شوند.

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \quad (2)$$

$$\Sigma \vec{M}_G = \vec{I} \vec{\alpha} \quad (3)$$

حال اگر تصویر این عضو در یکی از صفحات اصلی دستگاه مختصات کارتزین را دنبال نماییم، خواهیم داشت:

$$\Sigma F_x = m \bar{a}_x \quad (4)$$

$$\Sigma F_y = m \bar{a}_y \quad (5)$$

$$\Sigma M_G = I_{GZ} \alpha_Z \quad (۶)$$

برای تشکیل معادله ی ۶، نیاز است ممان اینرسی تصویر جسم در صفحه ی XY حول محور عمود بر صفحه (که از مرکز ثقل جسم می گذرد)، یعنی ممان اینرسی تصویر جسم حول محور Z که از مرکز ثقل جسم می گذرد، محاسبه شود. پیشنهاد ارائه شده در مقاله ی حاضر، این است که در این ممان اینرسی به جای استفاده از طول میله، از طول تصویر همان میله در صفحه ی XY استفاده شود.

به صورت عمومی، قانون پیشنهادی به شرح زیر است:

برای تشکیل معادله ی نیوتن اولیبر برای تصویر یک جسم صلب سه بعدی در یک صفحه ی دوبعدی، به جای استفاده از طول جسم، از طول تصویر همان جسم در صفحه ی مورد مطالعه استفاده شود.

در تحلیل سینتیک سه بعدی میله های صلب در صفحه، یعنی هنگامی که تصویر یک میله ی صلب در صفحه رصد می شود، باید توجه شود که علی رغم ثابت بودن طول میله در فضا که مصداق صلب بودن ذات آن است، اما تصویر میله در صفحه ی طولی متغیر حتی به مقدار صفر را نیز تجربه خواهد کرد. صفر بودن طول تصویر میله در صفحه، مربوط به حالتی است که در آن شرایط خاص میله بر صفحه ی مورد مطالعه عمود است؛ یعنی تصویر میله در چنین شرایطی، یک نقطه ی بدون بعد خواهد بود؛ اما اگر میله با صفحه زاویه ی غیرمتعامد داشته باشد، طول تصویر عددی، بزرگ تر از صفر است. حداکثر طول تصویر میله در صفحه نیز مربوط به وضعیتی است که میله به طور کامل با صفحه موازی است.

چنین رویکردی بر مبنای تحلیل های دوبعدی، سهولت قابل توجهی را برای تحلیل مسائلی که ذاتاً سه بعدی بوده و نیازمند تحلیل های برداری هندسی فضایی هستند، فراهم می آورد.

این تحقیق، از نوع تحلیل ریاضی و اثبات همسانی نتایج بین دو نگرش دو و سه بعدی در تحلیل مسائل سه بعدی است. ابزار تحلیل در این مطالعه، روش دینامیک معکوس است. فرض معین بودن دینامیکی حاکم بر تحلیل است؛ یعنی به ازای هر متغیر مجهول، یک معادله فی مابین متغیرهای موجود در مسئله ضرورت دارد. این مهم، در اغلب مسائل با فرض معلوم بودن داده های فضایی زمانی حرکت هر عضو و معلوم بودن حداقل یک انتها یا مفصل در مکانیزم است.

یافته ها

نتایج به دست آمده در مقاله ی حاضر، نشان می دهد امکان محاسبه ی ممان اینرسی اجسام سه بعدی متحرک در فضا با استفاده از تحلیل های دوبعدی سینماتیک فراهم است. مزایا و معایب دو روش سه بعدی و دوبعدی، در این تحقیق به تفصیل بیان شده است.

به عنوان نمونه، داده های ارائه شده در جداول ۱ و ۲، مربوط به یک آزمون راه رفتن طبیعی فردی با وزن ۶۵۰ نیوتن هستند که با نرخ نمونه برداری ۱۰۰ هرتز توسط سیستم های آنالیز حرکت نوری و صفحات نیرو ثبت شده اند. این داده ها، شامل موقعیت مفاصل در فضای سه بعدی و مؤلفه های نیروهای عکس العمل زمین در طی چرخه ی گام می باشند. در این مقاله، نیروها و گشتاورهای اعمال شده به مفاصل میچ پا و زانو در صفحه ی ساجیتال (YZ)، بر اساس تحلیل دینامیک معکوس محاسبه و به طور کامل تبیین شده اند (۹).

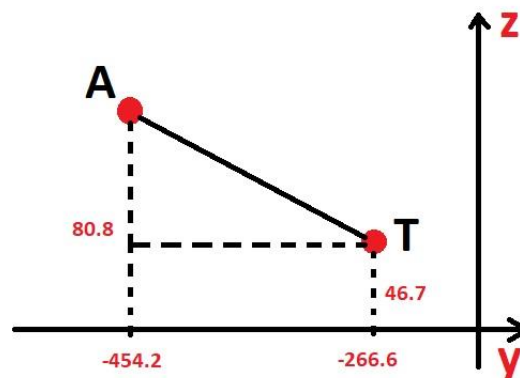
جدول ۱. اطلاعات سینماتیک ثبت شده برای یک آزمودنی در حین راه رفتن عادی با فرکانس ۱۰۰ هرتز توسط دستگاه آنالیز حرکت

Frame	TOE			ANKLE			KNEE		
	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)
۱	۳۵۰/۹	-۲۶۹	۴۹	۳۲۹/۴	-۴۵۶/۲	۸۱	۳۸۳/۸	-۴۸۹/۸	۴۹۹/۷
۲	۳۵۰/۴	-۲۶۷/۷	۴۸/۱	۳۲۹/۴	-۴۵۵	۸۰/۹	۳۸۷	-۴۸۲/۳	۵۰۰/۲
۳	۳۴۹/۹	-۲۶۶/۶	۴۶/۷	۳۲۹/۳	-۴۵۴/۲	۸۰/۸	۳۹۰/۲	-۴۷۵/۲	۵۰۰/۹
۴	۳۴۹/۳	-۲۶۵/۸	۴۵/۶	۳۲۹/۲	-۴۵۳/۵	۸۱	۳۹۳/۳	-۴۶۷/۷	۵۰۱/۴
۵	۳۴۸/۸	-۲۶۵/۳	۴۴/۹	۳۲۹/۲	-۴۵۲/۸	۸۱/۳	۳۹۶	-۴۵۹/۷	۵۰۱/۳

جدول ۲. اطلاعات سینماتیک ثبت شده برای یک آزمودنی در حین راه رفتن عادی با فرکانس ۱۰۰ هرتز توسط صفحات نیرو

Frame	GROUND REACTION FORCE (N)			CENTER OF PRESSURE	
	Fx	Fy	Fz	AX(m)	AY(m)
۱	۱۶/۵	-۶۹/۱	۷۱۶/۸	۲۴۳/۵	-۴۶۶/۷
۲	۶/۶	-۷۴/۴	۷۶۳/۲	۲۴۵	-۴۵۷/۹
۳	-۸/۳	-۷۱/۹	۸۰۲/۶	۲۴۶/۱	-۴۵۴/۲
۴	-۲۸/۳	-۸۶/۱	۸۴۲/۵	۲۴۶/۵	-۴۴۸/۵
۵	-۳۴/۹	-۷۲/۵	۸۸۹/۶	۲۴۷/۳	-۴۴۵

- مرحله‌ی اول: رسم عضو در فریم سوم



شکل ۱. موقعیت سه بعدی دو مفصل پنجه (TOE) و مچ پا (ANKLE) در فریم میانی از هر پنج فریم متوالی نمایش داده شده است (۹).

همچنین بردارهای نیروهای عکس العمل زمین (GRF) به منظور تحلیل هم‌زمان وضعیت مفاصل و نیروهای خارجی وارد شده از زمین، در شکل ۱ افزوده خواهند شد.

- مرحله‌ی دوم: تحلیل هندسی

در این مرحله، ابتدا مقادیر ΔY و ΔZ بین دو نقطه‌ی پنجه (TOE) و مچ پا (ANKLE) در هر یک از پنج فریم متوالی محاسبه می‌شود. سپس زاویه‌ی قرارگیری کف پا با استفاده از رابطه‌ی $\theta_{\text{Foot}}(\text{rad}) = \tan \Delta Z / \Delta Y$ به دست می‌آید (۹).

برای استانداردسازی محاسبات، فرض می‌شود که رابطه‌ی ΔY و ΔZ به گونه‌ای تعریف شود که در فریم سوم، مقدار هر دو بدون نیاز به قدر مطلق، دارای علامت مثبت باشند. در صورتی که نتیجه‌ی زاویه‌ی θ به صورت منفی

محاسبه شود، همان مقدار منفی با عدد π جمع می شود تا زاویه ی مکمل متناظر آن به دست آید. همچنین در فریم سوم، طول بردار AT نیز محاسبه می شود.

- مرحله ی سوم: محاسبه ی سرعت ها و شتاب های خطی مچ پا و زاویه ای پا^۱ با استفاده از روش مشتق مرکزی قابل انجام است.

به عنوان نمونه، سرعت خطی مچ پا در راستای محور قائم (Z)، با رابطه ی زیر قابل محاسبه است (۹):

$$VAz(i) = \frac{Z(i+1) - Z(i-1)}{2\Delta t} \quad (7)$$

جدول ۳. نتایج تحلیل سینماتیک داده های جدول ۱ بر اساس روابط مشتق مرکزی و توابع مثلثاتی

ΔY (mm)	ΔZ (mm)	AT yz (mm)	Θ ,foot (rad)	ω ,foot (rad/s)	α ,foot (rad/s ²)	Vy,ankle (m/s)	Vz,ankle (m/s)	ay,ankle (m/s ²)	az,ankle (m/s ²)
۱۸۷/۲	۳۲		۰/۱۶۹۳۰۳۸						
۱۸۷/۳	۳۲/۸		۰/۱۷۳۳۶۲۲	۰/۵۲۵۱		۰/۱	-۰/۰۱		
۱۸۷/۶	۳۴/۱	۱۹۰/۶۷۴	۰/۱۷۹۸۰۶۶		۳/۵۹۷			-۱/۵	۱/۷۵
۱۸۷/۷	۳۵/۴		۰/۱۸۶۴۰۹۲	۰/۵۹۷۱		۰/۰۷	۰/۰۲۵		
۱۸۷/۵	۳۶/۴		۰/۱۹۱۷۴۸۲						

- مرحله ی چهارم: محاسبه ی اینرسی ها

در این مرحله، پارامترهای اینرسی مربوط به کف پا (Foot) بر اساس وزن کل بدن و ابعاد هندسی پا محاسبه می شوند. این پارامترها، شامل وزن پا W_{Foot} ، جرم پا m_{Foot} ، شعاع ژیراسیون پا حول مفصل مچ پا $I_{Foot/Ankle}$ و ممان اینرسی پا نسبت به مفصل مچ پا در صفحه ساجیتال $I_{Foot/Ankle}$ است.

W_{total} : وزن کل بدن (نیوتن)

W_{foot} : وزن کف پا (نیوتن)

m_{Foot} : جرم کف پا (کیلوگرم)، برابر با وزن کف پا تقسیم بر شتاب گرانش زمین.

$R_{F/A}$: شعاع ژیراسیون یا فاصله ی مرکز جرم کف پا تا محور چرخش مفصل مچ پا در صفحه ی ساجیتال (متر)

AT_{yz} : طول بردار AT (فاصله ی بین دو نقطه در صفحه ی YZ) در فریم سوم (متر)

$I_{A yz}$: ممان اینرسی کف پا حول مفصل مچ پا در صفحه ی ساجیتال (کیلوگرم/مترمربع)

$$W_{foot} = 0.0145 W_{total} \text{ (N)}$$

$$m_{Foot} = W_{foot} / 9.81 \text{ (kg)}$$

$$R_{F/A} = R_{Foot/Ankle} = 0.69 * AT_{yz}$$

$$I_{Foot/Ankle yz} = I_{A yz} = m_f * R_{F/A}^2$$

در این روابط:

- وزن کل بدن، از وزن فرد مورد مطالعه استخراج می شود.
- وزن و جرم کف پا، با درصد وزنی تعیین شده بر اساس داده های بیومکانیکی استاندارد تعیین شده است (۹).
- شعاع ژیراسیون به عنوان نسبت ثابتی از طول بردار AT در صفحه ی ساجیتال تعیین می شود.
- ممان اینرسی کف پا حول مفصل مچ پا، با استفاده از جرم پا و شعاع ژیراسیون مربع محاسبه می شود که برای تحلیل دینامیکی حرکت اهمیت دارد.

طبق جدول آنتروپومتری شعاع ژیراسیون پا نسبت به مچ پا ($R_{F/A}$)، معادل با $۰/۶۹$ طول پا در صفحه‌ی ساجیتال (AT_{yz}) است. این مقدار، حتماً در $۱/۱۰۰۰$ ضرب می‌شود تا یکای ابعادی آن از میلی‌متر به متر تبدیل شود. پارامتر AT_{yz} ، طول پا در صفحه‌ی ساجیتال بوده که از فریم میانی به دست آمده است.

جدول ۴. نتایج محاسبه‌ی اینرسی‌ها؛ شامل W_{Foot} , m_{Foot} , $r_{Foot/Ankle}$, $I_{Foot/Ankle}$

W_{total} (N)	W_{foot} (N)	m_{foot} (kg)	$R_{F/A}$ (m)	$I_{Foot/Ankle\ yz}$ (kg/m ²)
۶۵۰	۹/۴۲۵	۰/۹۶۰۷۵	۰/۱۳۱۵۶۵	۰/۰۱۶۶۳

- مرحله‌ی پنجم: ترسیمه‌ی آزاد و ترسیمه‌ی اینرسی جسم

در این مرحله، جسم مورد مطالعه در فریم سوم با توجه به موقعیت مفاصل در صفحه‌ی مختصات شامل محورهای اصلی (X, Y, Z) رسم شده و نیروهای وارده بر روی آن نمایش داده می‌شود.

توجه ویژه‌ای لازم است که برای قسمت پا، نیروهایی که توسط دستگاه صفحات نیرو ثبت و اندازه‌گیری شده‌اند نیز باید به‌صورت بردارهای نیرو بر روی شکل وارد شوند تا تحلیل نیروها به‌طور دقیق انجام گیرد (۹).

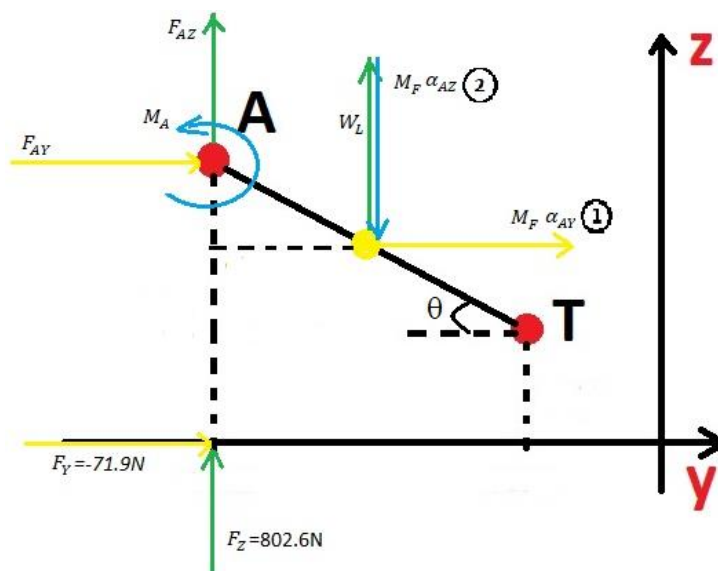
همچنین، نسبت فاصله‌ی مرکز جرم هر عضو نسبت به مفصل پروگزیمال یا دیستال آن در جدول آنتروپومتری (جدول ۵) استاندارد بیومکانیکی ارائه شده است و این داده‌ها برای تعیین دقیق موقعیت مرکز جرم هر بخش بدن استفاده می‌شوند.

جدول ۵. جدول آنترومتری

	Segment	Definition	Segment Weight	Center of Mass		Radius of Gyration		
			Total Body Weight	Segment Length		Segment Length		
				Proximal	Distal	Center of Gravity	Proximal	Distal
1.	Hand	Wrist axis / knuckle II middle finger	0.006	0.506	0.494	0.297	0.587	0.577
2.	Forearm	Elbow axis / ulnar styloid	0.016	0.430	0.570	0.303	0.526	0.647
3.	Upper arm	Glenohumeral joint / elbow axis	0.028	0.436	0.564	0.322	0.542	0.645
4.	Forearm and Hand	Elbow axis / ulnar styloid	0.022	0.682	0.318	0.468	0.827	0.565
5.	Total arm	Glenohumeral joint / ulnar styloid	0.050	0.530	0.470	0.368	0.645	0.596
6.	Foot	Lateral malleolus / head metatarsal II	0.0145	0.50	0.50	0.475	0.690	0.690
7.	Leg	Femoral condyles / medial malleolus	0.0465	0.433	0.567	0.302	0.528	0.643
8.	Thigh	Greater trochanter / femoral condyles	0.100	0.433	0.567	0.323	0.540	0.653
9.	Foot and Leg	Femoral condyles / medial malleolus	0.061	0.606	0.394	0.416	0.735	0.572
10.	Total Leg	Greater trochanter / medial malleolus	0.161	0.447	0.553	0.326	0.560	0.650
11.	Head and Neck	C7-T1 and 1 st rib / ear canal	0.081	1.000	-	0.495	1.116	-
12.	Shoulder mass	Sternoclavicular joint / glenohumeral axis	-	0.712	0.288	-	-	-
13.	Thorax	C7-T1 / T12-L1 and diaphragm	0.216	0.82	0.18	-	-	-
14.	Abdomen	T12-L1 / L4-L5	0.139	0.44	0.56	-	-	-
15.	Pelvis	L4-L5 / greater trochanter	0.142	0.105	0.895	-	-	-
16.	Thorax and Abdomen	C7-T1 / L4-L5	0.355	0.63	0.37	-	-	-
17.	Abdomen and Pelvis	T12-L1 / greater trochanter	0.281	0.27	0.73	-	-	-
18.	Trunk	Greater trochanter / glenohumeral joint	0.497	0.50	0.50	-	-	-
19.	Trunk Head Neck	Greater trochanter / glenohumeral joint	0.578	0.66	0.34	0.505	0.830	0.607
20.	HAT (Head Arm Trunk)	Greater trochanter / glenohumeral joint	0.678	0.626	0.374	0.496	0.798	0.621
21.	HAT (Head Arm Trunk)	Greater trochanter / mid rib	0.678	1.142	-	0.903	1.456	-

در شکل ۲، عبارت‌های ① و ②، به ترتیب بیانگر حاصل ضرب مؤلفه‌های شتاب مفصل مچ پا در راستای Z, Y در جرم پا است. زاویه‌ی θ ، در اینجا در جهت عقربه‌های ساعت است؛ پس علامت پشت $I\alpha$ در معادله‌ی گشتاور منفی است. این علامت، ربطی به علامت α ندارد؛ یعنی اگر α_{foot} منفی به دست آمده باشد، باید با همان علامت در رابطه جایگذاری شود. مؤلفه‌های F_{Ay} و F_{Az} ، نیروهای وارد بر مفصل مچ پا در جهات Y, Z هستند. جهت M_A ، در جهت

مثبت فرض می شود. برای محاسبه ی گشتاور حول زانو، نیروها و گشتاورهای وارد بر مفصل مچ پا از حل پا به مفصل مچ پای موجود در ترسیم آزاد نیروهای وارد بر ساق منتقل می شود (به صورت مساوی، موازی؛ ولی در خلاف جهت).



شکل ۲. نمایش شماتیک زاویه ی مچ پا (θ_{foot}) و محاسبه ی پارامترهای سینماتیکی

$$\Sigma \vec{M}_A = I_A \vec{\alpha} + A\vec{G} \times m_f \vec{a}_A$$

$$M_A + d_3 F_y - d_2 w_L = -I_A \alpha + d_1 \textcircled{1} + d_2 \textcircled{2}$$

$$M_A + \frac{80.8}{1000}(-71.9) - \frac{93.8}{1000}(9.425) = -0.01663(3597) + \frac{17.05}{1000}(0.961)(-1.5) + \frac{93.8}{1000}(0.961)(1.75)$$

$$M_A = 6.767 \text{ Nm}$$

- مرحله ی ششم: محاسبه ی بازوها (d_1 و d_2 و d_3 و d_4)

در تحلیل دینامیکی یک بخش از بدن، مانند کف پا (Foot)، برای محاسبه ی گشتاور نیروها (Moments) نسبت به یک مفصل (اینجا مفصل مچ پا یا Ankle Joint)، باید فاصله ی عمودی یا افقی نیروها نسبت به آن مفصل را بدانیم. به این فاصله ها، اصطلاحاً بازوی گشتاور (Moment Arm) گفته می شود.

فرمول کلی گشتاور، به صورت زیر است:

$$M = F \times d$$

که در آن:

- M ، گشتاور نسبت به یک نقطه (مفصل مچ پا)؛
- F ، نیروی وارد شده (مثلاً وزن قطعه، نیروی عکس العمل زمین)؛
- d ، فاصله ی عمودی (مؤلفه عمودی فاصله) بین خط اثر نیرو و نقطه ی چرخش (Moment Arm) است.

نحوه ی محاسبه ی بازوهای گشتاور

برای محاسبه ی دقیق این فواصل، از مختصات نقاط در صفحه ی YZYZZ استفاده می شود. فرض بر این است که زاویه ی کف پا نسبت به راستای افقی مشخص است و با استفاده از هندسه مثلثات و تشابه، می توان فواصل عمودی بین نقاط اثر نیرو و مفصل مچ پا را محاسبه کرد.

- مرحله هفتم: معادله‌ی گشتاور

$$\Sigma \vec{M}_A = I_A \vec{\alpha} + A\vec{G} \times m_f \vec{a}_A$$

تمامی فواصل و مختصات در محاسبه‌ی گشتاور، حتماً باید به متر تبدیل شوند.

جدول ۶. نتایج محاسبه‌ی بازوها (d_1 و d_2 و d_3 و d_4)

d_4	d_3	d_2	d_1
۰	۸۰/۸	۹۳/۸	۱۷/۰۵

- مرحله‌ی هشتم: موقعیت و شتاب مرکز ثقل پا. برای یافتن a_{Gy} , a_{Gz} باید با استفاده از روابط مثلثات متشابه، مختصات مرکز ثقل مشخص شود. نسبت تشابه، متناسب است با نسبت فاصله‌ی مرکز جرم تا هریک از مفاصل که از جدول آنترپومتري به دست می‌آید (۹).

جدول ۷. نتایج محاسبه‌ی مؤلفه‌های گشتاور در صفحه‌ی ساجیتال

d3 Fy	d4 Fz	d2 Wf	I α	d1 ①	d2 ②	MA
-۵/۸۱	۰	۰/۸۸۴	۰/۰۶	-۰/۰۲۵	۰/۱۵۸	۶/۷۶۷

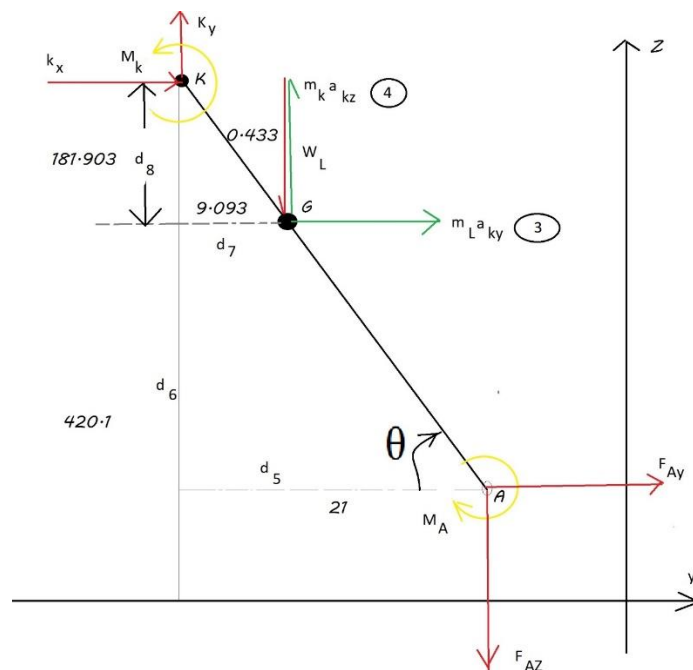
- مرحله‌ی نهم: معادله‌ی نیوتن و محاسبه‌ی نیروهای اعمالی به مفصل مچ پا

$$\Sigma Fz = m a_{Gz}, \Sigma Fy = m a_{Gy}$$

جدول ۸. نتایج محاسبه‌ی موقعیت مرکز ثقل تصویر عضو در صفحه‌ی ساجیتال و متغیرهای سینماتیک آن

yG (mm)	zG (mm)	VyG (m/s)	VzG (m/s)	ayG (m/s ²)	azG (m/s ²)	F Ay (N)	F Az (N)
-۳۶۲/۶	۶۵						
-۳۶۱/۳۵	۶۴/۵	۰/۱۱	-۰/۰۶۲۵				
-۳۶۰/۴	۶۳/۷۵			-۲/۱۲۵	۱/۵	۶۹/۸۵۸	-۷۹۱/۷۳
-۳۵۹/۶۵	۶۳/۳	۰/۰۶۷۵	-۰/۰۳۲۵				
-۳۵۹/۰۵	۶۳/۱						

- سایر مراحل: برای به دست آوردن گشتاور زانو، هفت مرحله‌ی اول برای عضو ساق پا اجرا می‌شود.



شکل ۳. دیاگرام گشتاور اعمال شده به مفصل مچ پا و زانو بر اساس تحلیل دینامیک معکوس

$$\sum F_y = m_F \vec{a}_y \Rightarrow F_y + F_{Ay} = 0.961(-2.125) \Rightarrow F_{Ay} = 69.858N$$

$$\sum F_z = m_F \vec{a}_z \Rightarrow F_z + F_{Az} + W_L = 0.961(1.5) \Rightarrow F_{Az} = -791.734N$$

$$\sum \vec{M}_k = I \vec{\alpha} + \vec{k}_G \times m_L \vec{a}_k$$

$$M_k - M_A - d_7 W_L - d_5 F_{Az} + d_6 F_{Ay} = -I_k \alpha_F + d_8 \textcircled{3} + d_7 \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} M_k - 6.767 - \frac{9.903}{1000} 30.225 - \frac{21}{1000} (-791.734) + \frac{420.1}{1000} 69.858 \\ = -0.152(8.473) + \frac{181.903}{1000} (3.081)(2.25) + \frac{9.093}{1000} (3.081)(-2) \\ \Rightarrow M_k = -39.014Nm \end{aligned}$$

جدول ۹. نتایج تحلیل سینماتیک داده های جدول ۱ برای ساق پا و مفصل زانو در صفحه ی ساجیتال بر اساس روابط مشتق

مرکزی و توابع مثلثاتی

ΔY (mm)	ΔZ (mm)	KA yz (mm)	Θ ,Leg (rad)	ω ,Leg (rad/s)	α ,Leg (rad/s ²)	Vy,Knee (m/s)	Vz,Knee (m/s)	ay,Knee (m/s ²)	az,Knee (m/s ²)
۳۳/۶	۴۱۸/۷		۱/۴۹۰۷۲						
۲۷/۳	۴۱۹/۳		۱/۵۰۵۷۸	۱/۵۰۶۵		۰/۷۳	۰/۰۶		
۲۱	۴۲۰/۱	۴۲۰/۶۲۵	۱/۵۲۰۸۵		۸/۴۷۳			۲/۲۵	-۲
۱۴/۲	۴۲۰/۴		۱/۵۳۷۰۳۲	۱/۶۷۶		۰/۷۷۵	۰/۰۲		
۶/۹	۴۲۰		۱/۵۵۴۳۶۹						

جدول ۱۰. نتایج محاسبه ی اینرسی ها برای ساق پا و مفصل زانو در صفحه ی ساجیتال

W,total	W,Leg	mLeg	rG L/K	I L/K
۶۵۰	۳۰/۲۲۵	۳/۰۸۱۰۴	۰/۲۲۲۰۹	۰/۱۵۲

جدول ۱۱. نتایج محاسبه‌ی بازوهای گشتاورگیری برای ساق پا و مفصل زانو در صفحه‌ی ساجیتال

d5	d6	d7	d8
۹/۰۹۳	۱۸۱/۹۰۳	۲۱	۴۲۰/۱

جدول ۱۲. نتایج محاسبه‌ی مؤلفه‌های گشتاور برای ساق پا و مفصل زانو در صفحه‌ی ساجیتال

d7 WL	d5 FAz	d6 FAy	Il/K α L	d8 ③	d7 ④	MK
۰/۲۷۵	-۱۶/۶۲۶	۲۹/۳۴۸	۱/۲۸۸	۱/۲۶۱	-۰/۰۵۶	-۳۹/۰۱۵

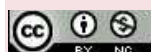
بحث و نتیجه‌گیری

استفاده از روش‌های دوبعدی در تحلیل اجسام سه‌بعدی که در فضا حرکت می‌کنند، امکان نظارت بر نتایج را فراهم می‌آورد. همچنین محققان با این رویکرد، می‌توانند بر صحت نتایج و روند فضایی زمانی متغیرهای سینماتیک نظارت کنند و از بروز خطاهای مختلف محاسباتی و مدل‌سازی ریاضی در توصیف حرکات سه‌بعدی پیشگیری و اجتناب نمایند.

منابع

1. Wren TA, Gorton GE, Ounpuu S. 3D gait analysis in orthopedics: Accuracy and challenges. *Journal of Pediatric Orthopedics*. 2020;40(3):145-52.
2. Smith TJ, Wren TA, McCarty K. Limitations of 3D motion capture in clinical settings. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*. 2022;30:1100-8.
3. Johnson M, Lee H, Patel R. Accuracy of 2D motion analysis for clinical gait evaluation. *Journal of Biomechanics*. 2023;145:111228.
4. Lee D, Kim Y, Han J. 2D projection-based moment of inertia estimation for lower limb analysis. *Gait & Posture*. 2024;102:88-95.
5. Seo K, Park S, Lee H. Wearable-based gait assessment using 2D analysis in stroke patients. *Clinical Biomechanics*. 2020;74:32-40.
6. Craig JJ. Introduction to robotics: Mechanics and control. 3rd ed. Pearson Education; 2005.
7. Sciavicco L, Siciliano B. Modelling and control of robot manipulators. 2nd ed. Springer; 2012.
8. Featherstone R. Rigid body dynamics algorithms. Springer; 2008.
9. Winter DA. Biomechanics and motor control of human movement. 4th ed. Wiley; 2009.
10. Shabana AA. Dynamics of multibody systems. 4th ed. Cambridge University Press; 2013.

استناد به این مقاله: دهقانی، ماجد، ذوالریاستین، شهاب، درجانی، مرتضی، و طباطبائی قمشه، فرهاد. (۱۴۰۴). تحلیل سینماتیک در حرکات سه‌بعدی با استفاده از روش‌های دینامیک معکوس دوبعدی. *فصلنامه پیشرفت‌های مهندسی در حوزه‌ی پزشکی و مواد*، ۱(۱)، ۱۹-۳۰.



Journal of Recent Advancements in Material Science and Biomedical Engineering is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.